# Teoremi fondamentali

## 6.1 Teorema di Equivalenza

Nel caso si sia interessati alla conoscenza del campo elettromagnetico solo in una regione dello spazio e' possibile definire delle opportune sorgenti equivalenti e non considerare il comportamento del campo al di fuori della regione di interesse. Tali sorgenti equivalenti non sono uniche ed esistono differenti modi per costruirle. Esse possono essere posizionate all'interno della regione di interesse o, sotto forma di densita' di corrente superficiale, sul contorno di esse.

Classico esempio e' il caso in cui sia interessati a valutare il campo prodotto da una spira elementare di corrente elettrica all'esterno di una opportuna superficie $S$ che la racchiude. In tal caso infatti il campo e' equivalente a quello prodotto da un dipolo magnetico elementare posto nell'origine della spira parallelamente al suo asse. Altro esempio e' quello di un dipolo posto ad una altezza $h$ da un piano conduttore elettrico indefinito che puo' essere studiato equivalentemente applicando il principio delle immagini.

Si vuole ora introdurre una particolare formulazione del teorema di equivalenza che va comunemente sotto il nome di *teorema di Love* o piu' semplicemente *teorema di equivalenza*. In realta' esso non e' che una diversa interpretazione del principio di Huygens che asserisce che la soluzione di un problema elettromagnetico all'interno di un volume $V$ e' completamente determinata dai campi elettrici e magnetici tangenziali alla superficie $S$ che racchiude tale volume.

Si consideri una distribuzione di sorgenti elettriche e magnetiche $\vec{J}$, $\vec{J}_m$ le quali generano un campo $\vec{E}$, $\vec{H}$. Chiameremo tale problema elettromagnetico problema originario (Fig. 6.1).

Si supponga di poter racchiudere le sorgenti all'interno di una superficie geometrica $S$ del tutto arbitraria. Sara' nostro obiettivo dimostrare che se si e' interessati alla sola conoscenza del campo elettromagnetico all'esterno della superficie $S$ e' possibile utilizzare un problema equivalente che presenta una opportuna distribuzione di corrente superficiale disposta sulla superficie

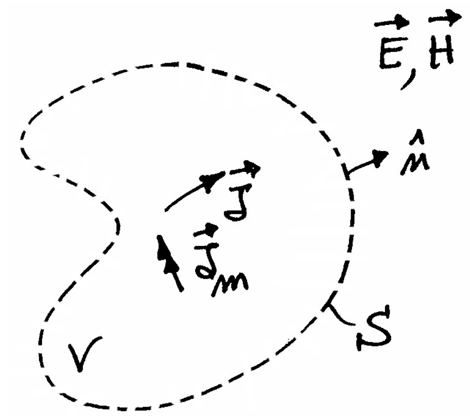


Figura 6.1: Problema originario.

$S$ cosi' come schematizzato il Fig. 6.2. In particolare si considera il caso in cui le correnti superficiali $\vec{J}_s$, $\vec{J}_{ms}$ generano un campo elettromagnetico

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{H}'(\vec{r}) = 0 \ , \qquad \text{per } \vec{r} \in V \tag{6.1}$$

$$\vec{E}'(\vec{r}), \vec{H}'(\vec{r}) \ , \qquad \text{per } \vec{r} \ni V \ , \tag{6.2}$$

.

A causa della presenza della distribuzione di corrente superficiale le seguenti condizioni al contorno dovranno essere soddisfatte sulla superficie $S$:

$$\hat{n} \times \vec{E}'_+ \Big|_S = \hat{n} \times \vec{E}'_- \Big|_S - \vec{J}_{ms} \tag{6.3}$$

$$\hat{n} \times \vec{H}'_+ \Big|_S = \hat{n} \times \vec{H}'_- \Big|_S + \vec{J}_s \ . \tag{6.4}$$

dove con $\vec{E}'_-$ e $\vec{H}'_-$ abbiamo indicato il campo all'interno del volume $V$ mentre con $\vec{E}'_+$ e $\vec{H}'_+$ il campo all'esterno (Fig. 6.3). Poiche' si e' richiesto che il campo all'esterno del volume $V$ sia identico a quello del problema originario, ma avendolo imposto nullo all'interno di tale volume (cioe' $\vec{E}'_- = \vec{H}'_- = 0$), e' possibile scrivere le seguenti relazioni:

$$\vec{E}'_+ \times \hat{n} \Big|_S = \vec{J}_{ms} \doteq \vec{E}(\vec{r}) \times \hat{n} \Big|_S \tag{6.5}$$

$$\hat{n} \times \vec{H}'_+ \Big|_S = \vec{J}_s \doteq \hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}) \Big|_S \ . \tag{6.6}$$

Si noti come le precedenti relazioni permettano di definire l'ampiezza delle correnti equivalenti legandole ai campi tangenziali presenti sulla superficie $S$ nel problema originario. Inoltre il campo $\vec{E}'$, $\vec{H}'$ del problema equivalente

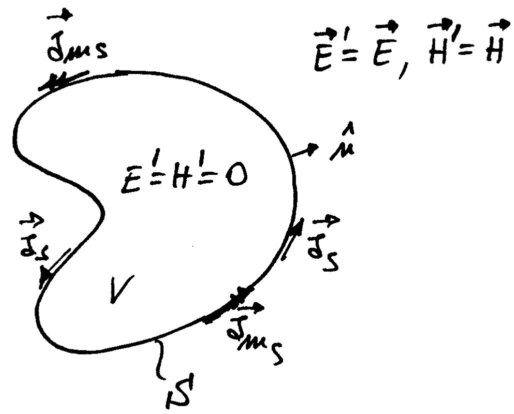


Figura 6.2: Problema equivalente.

all'esterno del volume $V$ soddisfa sia le equazioni di Maxwell sia le condizioni al contorno del problema originario. E' quindi necessario specificare solo una delle due precedenti relazioni per verificare le ipotesi del teorema di unicita' e poter asserire che all'esterno del volume $V$ il campo risulta uguale a quello originario ($\vec{E}' = \vec{E}$, $\vec{H}' = \vec{H}$). L'altra relazione e' necessaria per compensare la discontinuita' introdotta dall'aver imposto campo nullo all'interno del volume $V$.

Si noti che aver cercato una soluzione equivalente in cui il campo elettromagnetico e' nullo all'interno del volume $V$ permette di riempire quest'ultimo, in tutto o in parte, con un qualsiasi mezzo passivo. In esso infatti saranno sempre verificate le nuove condizioni al contorno che il mezzo passivo introduce.

In particolare e' possibile riempire il volume $V$ con un conduttore elettrico perfetto senza alterare il campo prodotto dalle sorgenti equivalenti $\vec{J}_s$ e $\vec{J}_{ms}$ distribuite sulla superficie $S$. Tali densita' di corrente superficiali risultano ancora legate al campo originario dalle relazioni (6.5)–(6.6) ma ora la densita' di corrente elettrica $\vec{J}_s$ risulta radiante in prossimita' di un conduttore elettrico perfetto e non contribuisce al campo elettromagnetico (cio' e' dimostrabile intuitivamente applicando il principio delle immagini o rigorosamente tramite il metodo delle sorgenti di prova). E' quindi possibile sostituire al problema originario di Fig. 6.1 quello schematizzato in Fig. 6.4 costituito da una superficie $S$ conduttrice elettrica perfetta su cui sono distribuite solo densita' di sorgente magnetica. Si noti che ora le sorgenti irradiano in presenza di un conduttore elettrico perfetto: l'unicita' della soluzione e' assicurata dalla condizione sulla densita' di corrente magnetica $\vec{J}_{ms} = \vec{E}(\vec{r}) \times \hat{n}\Big|_S$ mentre la

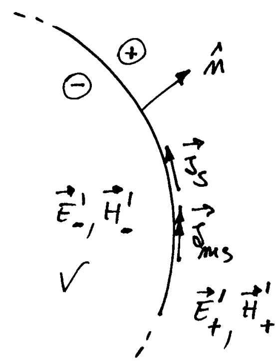

Figura 6.3: Condizioni al contorno sulla superficie $S$ del problema equivalente.

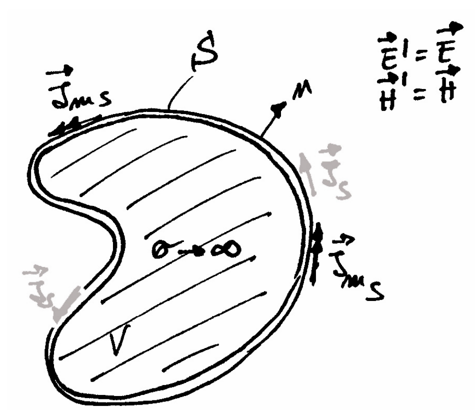

Figura 6.4: Problema equivalente alternativo.

presenza del conduttore assicura il fatto che la componente tangenziale del campo magnetico sia discontinua attraverso $S$.

Quest'ultima formulazione alternativa del teorema di equivalenza prende generalmente il nome di teorema di Schelkunoff.